

Devoir maison n° 5

À rendre le lundi 4 novembre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'appropriier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1.

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.

- Q1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- Q2. Déterminer une base et la dimension de F .
- Q3. Mêmes questions pour $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = x + y + z = 0\}$.
- Q4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 2.

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = P + (1 - X)P'$.

- Q1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Q2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Q3. L'application φ est-elle un isomorphisme ?
- Q4. Déterminer $\text{Ker}(M)$ et en déduire le noyau de φ . On précisera en particulier la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.
- Q5. En déduire le rang de φ .

Exercice 3.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- Q1. Calculer $M^2 - 4M + 3I_2$.
- Q2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_2 et M .
- Q3. *Question de cours* : Rappeler le théorème de la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B .
- Q4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels a_n et b_n tels que

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + a_nX + b_n.$$

- Q5. En évaluant la relation précédente en $X = 1$ et en $X = 3$, déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n .
- Q6. En déduire l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indications

Exercice 1.

1-2-3. Voir exercices 2 et 4 du TD6.

4. Voir exercice 8 du TD6.

Exercice 2.

Q1. Voir exercice 9 du TD6.

Q2. Voir exercice 13 du TD6.

Q3. Voir proposition 35 du rappel de cours.

Q4. Voir exercice 11 du TD6.

Q5. Retrouver dans le rappel de cours le résultat qui lie $\dim(\text{Ker}(\varphi))$ et $\text{rg}(\varphi)$.

Exercice 3.

Q1. Simple calcul.

Q2. Voir Q2 de l'exercice 14 du TD6.

Q3. Rechercher dans votre cours de sup, chapitre des polynômes (ou une question de cours de votre colle de sup n° 19 pour les 3/2, n° 21 pour les 5/2).

Q4. Application de la question précédente, on fera en particulier attention au degré du reste.

Q5. Les deux évaluations fournissent un système qu'il faut résoudre.

Q6. C'est une question bilan : il faut réutiliser les questions 1, 4 et 5.